

不确定脉冲多时滞系统的鲁棒 H_∞ 控制

杨戈锋¹, 刘秀湘², 胥布工³

(1. 广东财经职业技术学院 基础部, 广东 广州 510420 2. 华南师范大学 数学科学学院,
广东 广州 510631 3. 华南理工大学 自动化科学与工程学院, 广东 广州 510640)

摘要: 采用 Lyapunov 泛函结合线性矩阵不等式 (LMI) 技术, 研究了不确定线性脉冲多时滞系统的鲁棒 H_∞ 控制问题, 建立了使得闭环系统鲁棒渐近稳定且同时满足 H_∞ 性能指标要求的充分性条件, 给出了相应的无记忆状态反馈控制器的设计方法. 最后给出的例子说明了结果的有效性.

关键词: 脉冲时滞系统; 不确定性; H_∞ 鲁棒控制; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP271+.81 O231

文献标识码: A

文章编号: 1007-7162(2007)04-0025-05

在近代科学技术和工程领域的许多运动过程, 如神经网络活动、导弹和宇宙飞船的运动、机器人控制等, 其运动状态在固定时刻或非固定时刻会发生瞬动的突变现象. 这些突变的持续时间与整个运动过程的持续时间相比是非常短暂的, 可以认为是瞬间发生的. 这类瞬动现象的数学模型就是脉冲微分方程. 由于脉冲系统的研究有着广泛的实际背景和应用价值, 越来越受到国内外数学界和控制界的广泛重视, 如文 [1-2] 从数学理论方面研究了脉冲时滞微分方程解的存在性、唯一性及稳定性等问题, 分别建立了基于 Lyapunov 泛函和 Lyapunov 函数 (或称为 Razumkhin 型) 的稳定性定理. 文 [3] 则利用文 [1-2] 的结果研究了单时滞脉冲控制系统的稳定性问题, 分别建立了基于 Lyapunov 泛函和 Lyapunov 函数的稳定性准则. 文 [4] 研究了不确定性脉冲系统的鲁棒稳定性问题, 文 [5] 研究了时变脉冲系统的可控可观性. 同时, 在传统的连续系统中恰当地引入脉冲控制也可以得到好的控制效果, 参看文 [6-7]. 但迄今为止, 脉冲系统的控制理论尚在发展之中, 如关于不确定性脉冲系统的鲁棒 H_∞ 控制的研究尚不多见. 最近, 关治洪等^[8] 研究了脉冲效应矩阵是对角矩阵的无时滞的脉冲系统的鲁棒 H_∞ 控制, 基于代数 Riccati 方程正定矩阵解的存在性, 分析了相应不确定脉冲闭环系统具有鲁棒 H_∞ 特性的充分性条件.

本文采用 Lyapunov 泛函结合线性矩阵不等式 (LMI) 技术, 研究了线性脉冲多时滞不确定系统的 H_∞ 鲁棒控制问题, 脉冲效应矩阵可以为一般的矩

阵, 得到了使得闭环系统鲁棒稳定且同时满足 H_∞ 性能指标要求的条件, 同时给出了相应的无记忆状态反馈控制器的设计方法. 最后我们给出一个数值例子来说明本文的理论结果.

1 问题描述与预备知识

首先引入 $\|\cdot\|_M$ 范数和 $L_2[0, M]$ 空间的概念.

对任意的常数 $M > 0$, 定义

$$\|\mathbf{w}\|_M = \left(\int_0^M \|\mathbf{w}(t)\|^2 dt \right)^{1/2} = \left(\int_0^M \mathbf{w}^T(t) \mathbf{w}(t) dt \right)^{1/2},$$

这里向量范数为常用的 Euclid 范数, 即 $\|\mathbf{w}\| =$

$$\left(\sum_{i=1}^{l_2} w_i^2 \right)^{1/2}, \mathbf{w} = (w_1, \dots, w_{l_2})^T. \text{ 定义}$$

$$L_2[0, M] = \{ \mathbf{w} \in R^{l_2} \mid \|\mathbf{w}\|_M < \infty \}.$$

现考虑下面的线性脉冲多时滞不确定系统

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A}_0 + \Delta \mathbf{A}_0) \mathbf{x}(t) + \sum_{i=1}^m (\mathbf{A}_i + \Delta \mathbf{A}_i) \mathbf{x}(t - \tau_i) + \\ \quad (\mathbf{B} + \Delta \mathbf{B}) \mathbf{u}(t) + \mathbf{H} \mathbf{w}(t), t \neq t_k, \\ \mathbf{z}(t) = \mathbf{G} \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \mathbf{u}(t), t \neq t_k, \\ \Delta \mathbf{x} = (\mathbf{C}_k + \Delta \mathbf{C}_k) \mathbf{x}(t), t = t_k, \end{cases} \quad (1)$$

这里 $\mathbf{x}(t) \in R^n$ 为状态向量, $\mathbf{u} \in R^{l_1}$ 为控制输入, $\mathbf{w} \in R^{l_2}$ 为能量有界干扰信号, $\mathbf{z} \in R^{l_3}$ 为受控输出变量. $\mathbf{A}, \mathbf{C}_k (k = 0, 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots), \mathbf{B} \in R^{n \times l_1}, \mathbf{H} \in R^{n \times l_2}, \mathbf{G} \in R^{l_3 \times n}, \mathbf{D} \in R^{l_3 \times l_1}$ 为具有适当维数的实常数矩阵. $0 \leq \tau_i \leq \tau_{iM} (i = 1, 2, \dots, m)$ 为时滞常数. $t_k (k = 1, 2, \dots)$ 是脉冲时刻, 满足

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k < \dots, \lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty.$$

收稿日期: 2006-12-29

基金项目: 国家自然科学基金重点资助项目 (60334010); 国家自然科学基金资助项目 (60474047)

作者简介: 杨戈锋 (1974-), 男, 讲师, 主要研究方向为微分方程理论及应用.

$\Delta A_i (i=0,1,2,\dots,m)$ 、 ΔB 和 $\Delta C_k (k=1,2,\dots)$ 是适当维数的不确定矩阵函数,表示了系统模型中的参数不确定性.假定所考虑的参数不确定性是范数有界的,且具有以下形式

$$\Delta A_i = F_i \Lambda_i(t) E_i, (i=0,1,2,\dots,m),$$

$$\Delta B = F_B \Lambda_B(t) E_B,$$

$$\Delta C_k = F_{C_k} \Lambda_{C_k}(t) E_{C_k}, k=1,2,\dots,$$

其中 $F_i, E_i (i=0,1,2,\dots,m), F_B, E_B, E_{C_k}, E_{C_k}$ 是适当维数的已知常数矩阵,它们反映了不确定性的结构信息. $\Lambda_i(t), \Lambda_B(t), \Lambda_{C_k}$ 是时变未知矩阵且满足

$$\Lambda_i(t) \Lambda_i^T(t) \leq I, (i=0,1,2,\dots,m),$$

$$\Lambda_B(t) \Lambda_B^T(t) \leq I,$$

$$\Lambda_{C_k}(t) \Lambda_{C_k}^T(t) \leq I, (k=1,2,\dots).$$

我们的问题是:系统(1)在无记忆反馈控制律 $u(t) = Kx(t)$ 作用下,使得相应的闭环系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \bar{A}_0 x(t) + \sum_{i=1}^m (A_i + \Delta A_i) \times \\ \quad x(t - \tau_i) + Hw(t), t \neq t_k, \\ z(t) = \bar{G}x(t), t \neq t_k, \\ \Delta x = (C_k + \Delta C_k)x(t), t = t_k, \end{cases} \quad (2)$$

满足下述 H_∞ 鲁棒控制准则:

(a) 当 $w=0$ 时,闭环系统(2)渐近稳定;

(b) 在零初始条件和任意的 $w \in L_2[0, M]$, 闭环系统(2)满足 $\|z\|_M \leq \gamma \|w\|_M$.

其中

$$\bar{A}_0 = A_0 + \Delta A_0 + BK + \Delta BK, \bar{G} = G + DK.$$

定义 1 设 $\gamma > 0, M > 0$ 为任意给定的常数,如果系统(2)满足上述控制准则(a)和(b),则称闭环系统(2)是鲁棒渐近稳定的且具有 H_∞ 干扰抑制度 γ .

为了证明我们的结论,需要用到下面的引理,可参看文献[9].

引理 1 设 $Q \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 为给定的矩阵, $S \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 为任意的正定对称矩阵,则对任意的 $u \in \mathbb{R}^n, v \in \mathbb{R}^m$ 有下列不等式成立

$$2u^T Qv \leq u^T QS^{-1}Q^T u + v^T Sv.$$

引理 2 设 F, Λ, E 为具有适当维数的矩阵,且 $\Lambda^T \Lambda \leq I$, 则对于任意的实数 $\mu > 0$ 有下列不等式成立

$$F\Lambda E + E^T \Lambda^T F^T \leq \mu FF^T + \mu^{-1} E^T E.$$

引理 3 设 A, F, Λ, E 为具有适当维数的矩阵,且 $\Lambda^T \Lambda \leq I$, 则对于任意满足 $S - \mu EF^T > 0$ 的正定对称矩阵 S 和实数 $\mu > 0$, 有下列不等式成立

$$(A + F\Lambda E)^T S^{-1} (A + F\Lambda E) \leq$$

$$A^T (S - \mu EF^T)^{-1} A + \mu^{-1} E^T E.$$

2 主要结果

首先考虑如下的无不确定项的系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_0 x(t) + \sum_{i=1}^m A_i x(t - \tau_i) + Bu(t) + \\ \quad Hw(t), t \neq t_k, \\ z(t) = Gx(t) + Du(t), t \neq t_k, \\ \Delta x = C_k x(t), t = t_k, \end{cases} \quad (3)$$

式中有关符号含义与系统(1)相同.考虑在无记忆反馈控制律 $u(t) = Kx(t)$ 作用下其闭环系统的稳定性和鲁棒性能.

定理 1 设 $\gamma > 0$ 为给定常数,若存在矩阵 $P > 0, S_i > 0 (i=1, \dots, m)$ 使得下述线性矩阵不等式成立

$$\begin{bmatrix} P\bar{A}_0 + \bar{A}_0^T P + \sum_{i=1}^m S_i PA_1 \cdots PA_m \frac{1}{\gamma} PH \bar{G}^T \\ * & -S_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ * & * & \cdots & -S_m & 0 & 0 \\ * & * & \cdots & 0 & -I & 0 \\ * & * & \cdots & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} P & (I + C_k)^T P \\ * & P \end{bmatrix} \geq 0, k=1,2,\dots. \quad (5)$$

则(3)的闭环系统是鲁棒渐近稳定的且具有 H_∞ 干扰抑制度 γ . 这里 $\bar{A}_0 = A_0 + BK, \bar{G} = G + DK$.

证明 将 $u(t) = Kx(t)$ 代入系统(3),下面分两步证明定理的结论.

1) 先证闭环系统满足控制准则(a). 选取 Lyapunov 泛函

$$V(t, \varphi) = \varphi^T(0) P \varphi(0) + \sum_{i=1}^m \int_{-\tau_i}^0 \varphi^T(s) S_i \varphi(s) ds,$$

其中矩阵 $P > 0, S_i > 0 (i=1, \dots, m)$ 待定.

当 $t \neq t_k$ 时, $V(t, \varphi)$ 沿闭环系统的解对 t 求导有

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, \varphi) &= \varphi^T(0) (P\bar{A}_0 + \bar{A}_0^T P) \varphi(0) + \varphi^T(0) PHw(t) + \\ & \quad w^T(t) H^T P \varphi(0) + 2 \sum_{i=1}^n \varphi^T(0) PA_i \varphi(-\tau_i) + \\ & \quad \sum_{i=1}^m \varphi^T(0) S_i \varphi(0) - \sum_{i=1}^m \varphi^T(-\tau_i) S_i \varphi(-\tau_i). \end{aligned} \quad (6)$$

根据引理 1,我们有

$$\dot{V}(t, \varphi) \leq \varphi^T(0) \left(P\bar{A}_0 + \bar{A}_0^T P + \sum_{i=1}^m PA_i S_i^{-1} A_i^T P + \sum_{i=1}^m S_i \right) \varphi(0) + 2 \varphi^T(0) PHw(t). \quad (7)$$

另外,根据定理条件中式(4),由 Schur 补引理,故存在矩阵 $Q>0$,使得

$$P\bar{A}_0 + \bar{A}_0^T P + \sum_{i=1}^m P A_i S_i^{-1} A_i^T P + \sum_{i=1}^m S_i + \gamma^{-2} P H H^T P + \bar{G}^T \bar{G} = -Q. \tag{8}$$

将式(8)代入(7),有

$$\dot{V}(t,\varphi) \leq -\|z(t)\|^2 + \gamma^2 \|w(t)\|^2 - x^T(t) Q x(t). \tag{9}$$

于是当 $w=0$ 时有

$$\dot{V}(t,\varphi) \leq -\|z(t)\|^2 - x^T(t) Q x(t). \tag{10}$$

另外,由式(5)可知下式成立

$$(I + C_k)^T P (I + C_k) \leq P, \quad k=1,2,\dots.$$

又注意到 $\sum_{i=1}^m \int_{-\tau_i}^0 x^T(t+s) S_i x(t+s) ds =$

$\sum_{i=1}^m \int_{t-\tau_i}^t x^T(s) S_i x(s) ds$ 关于 t 是连续的,故当 $t=t_k$ 时有

$$\lim_{t \rightarrow t_k^+} V(t,\varphi) = x^T(t_k^+) P x(t_k^+) + \sum_{i=1}^m \int_{-\tau_i}^0 x^T(t_k+s) S_i x(t_k+s) ds \leq x^T(t_k) P x(t_k) + \sum_{i=1}^m \int_{-\tau_i}^0 x^T(t_k+s) S_i x(t_k+s) ds \leq V(t_k,\varphi). \tag{11}$$

结合式(10),根据文[1]的定理 4.1,我们知道(3)的闭环系统当 $w=0$ 时是渐近稳定的.

2)下面证明闭环系统满足 H_∞ 控制准则(b).对任意的 $M>0$,不妨设 $M \in (t_k, t_{k+1})$.考虑性能指标

$$J_{zw} = \int_0^M [z(t)^T z(t) - \gamma^2 w^T(t) w(t)] dt.$$

由于在零初始条件下有 $V(0,0)=0$,于是由式(9)和(11)可得

$$\begin{aligned} J_{zw} &= \int_0^M [z(t)^T z(t) - \gamma^2 w^T(t) w(t) + \dot{V}(t,\varphi)] dt - \int_0^M \dot{V}(t,\varphi) dt \leq - \left(\int_0^{t_1} \dot{V}(t,\varphi) dt + \int_{t_1}^{t_2} \dot{V}(t,\varphi) dt + \dots \int_{t_k}^M \dot{V}(t,\varphi) dt \right) = - \sum_{i=1}^k (V(t_i,\varphi) - V(t_i^+,\varphi)) - V(M,\varphi) < 0. \end{aligned}$$

所以闭环系统满足 H_∞ 控制准则. 定理证毕.

注 1 如果在系统(3)中的脉冲效应矩阵为对角矩阵,也即 $\Delta x = c_k x(t), k=1,2,\dots$. 此时条件(5)变为 $(1+c_k)^2 \leq 1$,即 $-2 \leq c_k \leq 0, k=1,2,\dots$. 这与文[7]的结果是类似的.

下面的定理给出了系统(3)状态反馈控制的设计方法.

定理 2 对于系统(3),若下述线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & H & XG^T + Y^T D^T \\ * & -U_{22} & 0 & 0 \\ * & * & -\gamma^2 I & 0 \\ * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0, \tag{12}$$

$$\begin{bmatrix} X & X(I+C_k)^T \\ (I+C_k)X & X \end{bmatrix} \geq 0, (k=1,2,\dots). \tag{13}$$

有解 $X>0, W_i>0, (i=1,\dots,m), Y$, 其中

$$U_{11} = A_0 X + B Y + (A_0 X + B Y)^T + \sum_{i=1}^n W_i, U_{12} = \text{diag}[A_1 X \cdots A_m X], U_{22} = \text{diag}[W_1 \cdots W_m].$$

则闭环系统是鲁棒渐近稳定的且具有 H_∞ 干扰抑制度 γ ,其中的状态反馈控制器为

$$K = YX^{-1}. \tag{14}$$

证明 如果矩阵不等式(12)~(13)有解 $(X, W_1, \dots, W_m, Y)$. 令 $P = X^{-1}, S_i = P W_i P (i=1, \dots, m), K = YX^{-1}$. 对式(12)左右同乘 $\text{diag}[P, \dots, P, I, I]$ (其中 P 的个数为 $m+1$),则得到系统(3). 在式(13)两边同乘 $\text{diag}[P, P]$ 则得到式(5),故定理结论成立.

根据上述对对称系统的分析,我们现在可得到不确定系统的有关结论.

定理 3 对于系统(1),如果存在矩阵 $X>0, W_i>0 (i=1,\dots,m)$, 矩阵 Y 及标量 $\varepsilon_i>0 (i=0,1,\dots,m), \varepsilon_B>0$ 和 $\varepsilon_{C_k}>0 (k=1,2,\dots)$,使得下述线性矩阵不等式成立

$$\begin{bmatrix} \tilde{U}_{11} & \tilde{U}_{12} & X E_0^T & Y^T E_B^T & \tilde{U}_{15} & 0 \\ * & -\tilde{U}_{22} & 0 & 0 & 0 & \tilde{U}_{26} \\ * & * & -\varepsilon_0 I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\varepsilon_B I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\tilde{U}_{55} & 0 \\ * & * & * & * & * & -\tilde{U}_{66} \end{bmatrix} < 0, \tag{15}$$

$$\begin{bmatrix} -X & X(I+C_k)^T & X E_{C_k}^T \\ * & -X + \varepsilon_{C_k} F_{C_k} F_{C_k}^T & 0 \\ * & * & -\varepsilon_{C_k} I \end{bmatrix} \leq 0, (k=1,2,\dots), \tag{16}$$

$$X - \varepsilon_{C_k} F_{C_k} F_{C_k}^T \geq 0, (k=1,2,\dots). \tag{17}$$

其中

$$\tilde{U}_{11} = A_0 X + B Y + (A_0 X + B Y)^T + \sum_{i=1}^m (W_i + \varepsilon_i F_i F_i^T) + \varepsilon_0 F_0 F_0^T + \varepsilon_B F_B F_B^T$$

$$\tilde{U}_{12} = [A_1 X \cdots A_m X]; \tilde{U}_{15} = [HXG^T + Y^T D^T];$$

$$\tilde{U}_{22} = \text{diag}[W_1 \cdots W_m];$$

$$\tilde{U}_{26} = \text{diag}[XE_1^T \cdots XE_m^T]; \tilde{U}_{55} = \text{diag}[\gamma^2 I I];$$

$$\tilde{U}_{66} = \text{diag}[\varepsilon_1 I \cdots \varepsilon_m I].$$

那么闭环系统(2)是鲁棒渐近稳定的且具有 H_∞ 干扰抑制度 γ , 其中状态反馈控制器为 $K = YX^{-1}$.

证明 如果上述矩阵不等式有解, 令

$$P = X^{-1}, S_i = PW_i P (i = 1, \cdots, m), K = YX^{-1}.$$

选取 Lyapunov 泛函

$$V(t, \varphi) = \varphi^T(0)P\varphi(0) + \sum_{i=1}^m \int_{-\tau_i}^0 \varphi^T(s)S_i\varphi(s)ds.$$

于是当 $t \neq t_k$ 时, $V(t, \varphi)$ 沿系统(2)的解对 t 求导, 利用引理 1 得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, \varphi) &\leq \varphi^T(0) \left(P[A_0 + \Delta A_0 + (B + \Delta B)K] + \right. \\ &\quad \left. [A_0 + \Delta A_0 + (B + \Delta B)K]^T P \right) \varphi(0) + \\ &\quad \sum_{i=1}^m \varphi^T(0) [P(A_i + \Delta A_i)S_i^{-1}(A_i + \Delta A_i)^T P + \\ &\quad S_i] \varphi(0) + 2\varphi^T(0)PHw(t). \end{aligned}$$

往证 $\dot{V}(t, \varphi) < 0$.

事实上, 在式(15)左右同乘 $\text{diag}[P, \cdots, P, I, \cdots, I]$ (其中 P 的个数为 $m+1$), 根据 Schur 补引理我们得到

$$Z + \Delta Z < 0, \quad (18)$$

其中

$$Z = \begin{bmatrix} \Pi_1 & PA_1 & \cdots & PA_m \\ * & -S_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & * & -S_m \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \Delta Z = & \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^m \varepsilon_i PF_i F_i^T P + \varepsilon_B PF_B F_B^T P & 0 & \cdots & 0 \\ * & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & 0 \end{bmatrix} + \\ & \begin{bmatrix} \varepsilon_0^{-1} E_0^T E_0 + \varepsilon_B^{-1} K^T E_B^T E_B K & 0 & \cdots & 0 \\ * & \varepsilon_1^{-1} E_1^T E_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & \varepsilon_m^{-1} E_m^T E_m \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

这里

$$\Pi_1 = P(A_0 + BK) + (A_0 + BK)^T P +$$

$$\gamma^{-2} PHH^T P + \bar{G}^T \bar{G} + \sum_{i=1}^m S_i.$$

$$\begin{aligned} \Omega = & \begin{bmatrix} PF_B \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Lambda_B [E_B K 0 \cdots 0] + \begin{bmatrix} PF_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Lambda_0 [E_0 0 \cdots 0] + \\ & \cdots + \begin{bmatrix} PF_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Lambda_m [0 0 \cdots E_m], \end{aligned}$$

于是根据引理 2, 有

$$\begin{bmatrix} \tilde{\Pi}_1 & P(A_1 + \Delta A_1) & \cdots & P(A_m + \Delta A_m) \\ * & -S_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & -S_m \end{bmatrix} < 0.$$

其中

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_1 = & P(A_0 + BK) + (A_0 + BK)^T P + \gamma^{-2} PHH^T P + \\ & \bar{G}^T \bar{G} + \sum_{i=1}^m S_i + P(\Delta A_0 + \Delta BK) + (\Delta A_0 + \Delta BK)^T P. \end{aligned}$$

由 Schur 补引理则知存在 $\tilde{Q} > 0$ 使得

$$\begin{aligned} -\tilde{Q} = & \tilde{\Pi}_1 + \sum_{i=1}^m P(A_i + \Delta A_i)S_i^{-1}(A_i + \\ & \Delta A_i)^T P + S_i < 0, \end{aligned}$$

当 $t \neq t_k$ 时, 得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, \varphi) &\leq -\varphi^T(0) \left(\gamma^{-2} PHH^T P + \bar{G}^T \bar{G} + \tilde{Q} \right) \times \\ &\varphi(0) + 2\varphi^T(0) PHw(t) \leq -\gamma^{-2} \left(\gamma^2 w(t) - \right. \\ &\left. H^T P \varphi(0) \right)^T \left(\gamma^2 w(t) - H^T P \varphi(0) \right) - \varphi^T(0) \bar{G}^T \bar{G} \varphi(0) + \\ &\gamma^2 w^T(t) w(t) - \varphi^T(0) \tilde{Q} \varphi(0) \leq -\|z(t)\|^2 + \\ &\gamma^2 \|w(t)\|^2 - x^T(t) \tilde{Q} x(t). \end{aligned} \quad (19)$$

另一方面, 在式(16)左右同乘 $\text{diag}[P, I, I]$ 并注意到 $P = X^{-1}$, 得

$$\begin{bmatrix} -P & (I + C_k)^T & E_{C_k}^T \\ * & -(P^{-1} - \varepsilon_{C_k} F_{C_k} F_{C_k}^T) & 0 \\ * & * & -\varepsilon_{C_k} C_k I \end{bmatrix} \leq 0, (k=1, 2, \cdots).$$

根据 Schur 补引理上式意味着

$$\begin{aligned} (I + C_k)^T (P^{-1} - \varepsilon_{C_k} F_{C_k} F_{C_k}^T)^{-1} (I + C_k) + \\ \varepsilon_{C_k} E_{C_k}^T E_{C_k} \leq P, k = 1, 2, \cdots. \end{aligned} \quad (20)$$

同样注意到 $\sum_{i=1}^m \int_{-\tau_i}^0 x^T(t+s)S_i x(t+s)ds =$

$\sum_{i=1}^m \int_{t-\tau_i}^t x^T(s)S_i x(s)ds$ 关于 t 是连续的, 根据引理 3 及(20)得到

$\mathbf{x}^T(t_k^+) \mathbf{P} \mathbf{x}(t_k^+) \leq \mathbf{x}^T(t_k) \mathbf{P} \mathbf{x}(t_k), k = 1, 2, \dots$
因此当 $t = t_k$ 时有

$$\lim_{t \rightarrow t_k^+} V(t, \varphi) \leq \mathbf{x}^T(t_k) \mathbf{P} \mathbf{x}(t_k) + \sum_{i=1}^m \int_{-t_k}^0 \mathbf{x}^T(t_k + s) \times \mathbf{S} \mathbf{x}(t_k + s) ds \leq V(t_k, \varphi). \tag{21}$$

结合式 (19)和 (21), 因此当 $\mathbf{w}(t) = 0$ 时我们知道闭环系统 (2)是渐近稳定的.

至于闭环系统具有 H_∞ 干扰抑制度 γ 的证明与定理 1的证明类似, 不再赘述.

注 2 注意到定理 2中的结果与时滞常数无关, 因而这是一个时滞无关的结果

3 数值例子

例 考虑系统 (1), 其中

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, t \in (0, \infty), \mathbf{F}_0 = \mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_B = \mathbf{F}_C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_k = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & -0 & 5 \end{bmatrix}, \mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_B = \mathbf{E}_C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, k = 1, 2, \dots$$

现在来设计反馈控制器 $\mathbf{u} = \mathbf{K} \mathbf{x}(t)$, 使得上述系统为 H_∞ 鲁棒稳定且具 H_∞ 干扰抑制度 $\gamma = 1$ 根据定理 3 求解矩阵线不等式 (15) ~ (17)得到

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 7.6146 & 2.0111 \\ 2.0111 & 4.9708 \end{bmatrix} > 0, \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} -3.8585 & 0.3580 \\ -1.0022 & -2.9122 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} -3.8585 & 0.3580 \\ -1.0022 & -2.9122 \end{bmatrix} > 0, \varepsilon_0 = 9.3221,$$

$$\varepsilon_1 = 9.3251, \varepsilon_B = 9.3101, \varepsilon_k = 8.1068$$

相应的控制器的增益矩阵

$$\mathbf{K} = \mathbf{Y} \mathbf{X}^{-1} = \begin{bmatrix} -0.5886 & 0.3102 \\ 0.0259 & -0.5963 \end{bmatrix}.$$

4 结论

本文研究了线性脉冲多时滞不确定系统, 提出了鲁棒 H_∞ 控制问题, 建立了脉冲闭环系统鲁棒稳定且同时满足 H_∞ 性能指标要求的充分性准则, 得到了控制器的设计方法. 给出的数值例子说明了本文的结果.

参考文献:

[1] GEORGE B, LIU X Z. Existence uniqueness and boundedness results for impulsive delay differential equations[J]. *Applicable Analysis*, 2000, 74(1-2): 71-93.

[2] LIU X Z, GEORGE B. Uniform asymptotic stability for impulsive delay differential equations[J]. *Math Comp Appl*, 2001(41): 903-915.

[3] LIU X Z. Stability of impulsive control systems with time delay[J]. *Math Comput Model*, 2004(39): 511-519.

[4] LIU B, LIU X Z, LIAO X. Study on robust uniform asymptotic stability for uncertain linear impulsive delay systems[J]. *Journal of Systems Engineering and Electronics*, 2003, 14(3): 63-66.

[5] GUANG ZH, QIAN TH, YU X H. Controllability and observability of linear time-varying impulsive systems[J]. *IEEE Trans Circ Systems (I): Fundamental Theory and Applications*, 2002, 49(8): 1198-1208.

[6] LIU X Z. Impulsive stabilization and control of chaotic system[J]. *Nonlinear Analysis*, 2001(4): 1081-1092.

[7] 关治洪, 廖俊锋, 廖锐全. 不确定脉冲系统的鲁棒 H_∞ 控制[J]. *控制理论与应用*, 2002, 19(8): 623-626.

[8] 成新明, 关治洪, 刘新芝. 一类不确定系统的脉冲控制[J]. *电机与控制学报*, 2002, 6(4): 310-312.

[9] 俞立. 鲁棒控制: 线性矩阵不等式方法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002.

Robust H_∞ control for Uncertain Impulsive Systems with Multi-delay

YANG Ge-feng¹, LIU Xiu-xiang², XU Bu-gong³

(1. Department of Primary Course, Guangdong College of Finance and Economics, Guangzhou China 510420;
2. School of Mathematical Sciences, South China Normal University, Guangzhou China 510631;
3. College of Automation Science & Engineering, South China University of Technology, Guangzhou China 510640)

Abstract This paper deals with a problem of robust H_∞ control for uncertain impulsive system with multi-delay. A H_∞ controller is presented in terms of linear matrix inequalities such that the closed-loop system is asymptotically stable and satisfies the H_∞ control conditions for all admissible uncertainties. A numerical example illustrates the theoretical results.

Key words impulsive delay-differential systems; uncertainty; H_∞ control; LMI

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. <http://www.cnki.net>